Esercizi di Matematica Finanziaria

Un'utile premessa

Negli esercizi di questo capitolo, tutti gli **importi in euro** sono opportunamente **arrotondati al centesimo**. Ad esempio, €2 589.23658 $\simeq$ €2 589.24 (con un abuso di notazione, scriveremo comunque "=" prima del risultato finale).

Si consiglia di non arrotondare i risultati intermedi inerenti ai tassi di interesse (considerando tutte le cifre che può riportare la calcolatrice), arrotondando solo il risultato finale. Se si tratta di un tasso di interesse e questo viene indicato in percentuale, sarebbe desiderabile approssimare il risultato mantenendo **almeno** due cifre decimali significative. Ad esempio, $i = 0.025368912\ldots \simeq 2.54\,\%$.

Nella descrizione delle operazioni finanziarie, verranno spesso impiegati ***diagrammi importi/epoche***[1].

Il regime dell'interesse semplice

Esercizio 1 *Un risparmiatore versa presso un istituto di credito* 2 500 *euro. Si conviene che tale capitale venga remunerato in regime di interesse semplice al tasso annuo* $i = 2.1\,\%$. *Determinare gli interessi maturati dopo* 7 *mesi.*

Soluzione. In regime di interesse semplice, l'interesse viene calcolato in base alla formula

$$I = C\,i\,t\,,$$

dove C è capitale iniziale, i il tasso annuo e t la durata dell'operazione espressa in anni. Nel caso il tempo sia espresso in mesi (m), tale formula diviene

$$I = C\,i\,\frac{m}{12}\,.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio nell'espressione precedente, si ottiene

$$I = \frac{2\,500 \cdot 0.021 \cdot 7}{12} = 367.50\,€.$$

□

[1] In particolare, verrà utilizzato il colore **blu** per indicare che un importo viene **capitalizzato**, e il colore **rosso** per indicare, invece, un'operazione di **attualizzazione**.

Esercizio 2 *Una banca ha concesso ad un imprenditore un prestito (capitale) di* 51 200 *euro per* 2 *anni e* 6 *mesi concordando una remunerazione in regime di interesse semplice in base al tasso annuo del* 7.5%. *Si trovi l'importo (montante) che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza del contratto.*

Soluzione. Dal punto di vista della banca, si tratta di un'operazione di investimento che inizia all'epoca 0 con la concessione del capitale $C = 51\,200$ e termina all'epoca $t = 2 + \frac{6}{12} = 2.5$ anni con la restituzione del montante M, che in regime di interesse semplice viene calcolato con la seguente formula:

$$M = C\,(1 + it),$$

dove i è il tasso annuo di interesse, nel nostro esempio pari al 7.5 %. Sostituendo, si ottiene l'importo che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza

$$M = 51\,200\,(1\ +\ 0.075 \cdot 2.5) = 60\,800\,€.$$

□

Esercizio 3 *Supponendo che il tasso di interesse annuale sia* $i = 3\,\%$, *calcolare il valore attuale in regime di interesse semplice del pagamento di* 8 500 *euro fra* 3 *anni.*

Soluzione. Ricordiamo che la formula che lega il montante ed il capitale iniziale nel regime di interesse semplice è

$$M = C(1 + it) \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{M}{1 + it}\,.$$

Dunque, se vogliamo ricavare il valore attuale, cioè il capitale corrispondente ad un montante di 8 500 euro esigibili fra 3 anni, dobbiamo calcolare[2]

$$C = \frac{M}{1 + it} = \frac{8\,500}{1 + 0.03 \cdot 3} = 7\,798.17\,€\,.$$

□

Esercizio 4 *Si determini il tempo necessario affinché, in regime di interesse semplice, un capitale di* 2 000 *euro produca un montante di* 2 050 *euro, al tasso del* 2.5 % *annuo.*

Soluzione. Dalla relazione[3]

$$I = C\,i\,t\,,$$

si ottiene facilmente

$$t = \frac{I}{C\,i}\,.$$

[2]Come osservato nella premessa iniziale, l'ammontare in euro del valore attuale C è approssimato al centesimo.

[3]Suggerimento: provare a svolgere l'esercizio partendo dalla formula del montante.

Risultano assegnate le grandezze M e C, da cui si ricava l'interesse

$$I = M - C = 2\,050 - 2\,000 = 50\,€.$$

Sostituendo i dati del problema, si ha il risultato

$$t = \frac{50}{2\,000 \cdot 0.025} = 1 \text{ anno}\,.$$

□

Esercizio 5 *Determinare il tasso di interesse annuo affinché, in regime di interesse semplice, un capitale di* 1 600 *euro produca un interesse di* 80 *euro in sei mesi.*

Soluzione. Dalla formula dell'interesse semplice[4]

$$I = C\,i\,t\,,$$

si ricava immediatamente

$$i = \frac{I}{C\,t}\,.$$

Risultano assegnate le grandezze $I = 80$, $C = 1\,600$ e $t = \frac{6}{12} = 0.5$. Sostituendo tali dati nella formula precedente si ottiene

$$i = \frac{80}{1\,600 \cdot 0.5} = 0.1 = 10\,\%\,.$$

□

Il regime dell'interesse composto

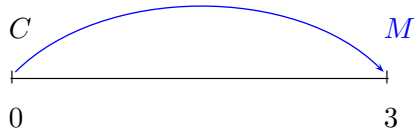
Esercizio 6 *Il capitale iniziale di* 3 500 *euro viene impiegato in regime di interesse composto ad un tasso annuo del* 4.3 %. *Si calcoli il montante dopo* 3 *anni.*

Soluzione. I dati del problema sono i seguenti: $C = 3\,500$, $i = 0.043$, $t = 3$. In base alla formula del montante in regime di interesse composto, si ottiene

$$M \;=\; C\,(1+i)^t \;=\; 3\,500\,(1+0.043)^3 = 3971.19\,€.$$

L'operazione è descritta schematicamente mediante il seguente *diagramma importi/epoche.*

[4]Suggerimento: provare a svolgere l'esercizio partendo dalla formula del montante, ricordando che $M = C + I$.

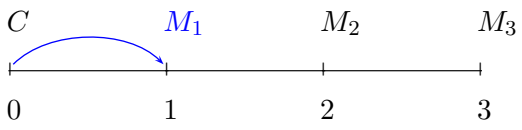


In virtù della scindibilità del regime dell'interesse composto, è possibile calcolare il montante finale a partire dai montanti calcolati alle epoche intermedie $t = 1$ e $t = 2$. Indichiamo con M_1, M_2 ed M_3 i montanti alla fine del primo, del secondo e del terzo anno, rispettivamente.

Per il calcolo del montante finale si può procedere per passi come segue:

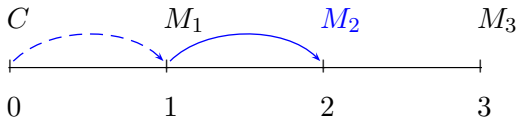
1. si calcola il montante del capitale C alla fine del primo anno

$$M_1 = C\,(1 + 0.043)^1 = 3\,500 \cdot 1.043 = 3\,650.50\,;$$



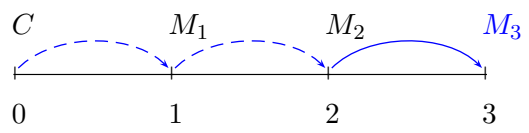
2. M_1 costituirà il capitale all'inizio del secondo anno, che verrà impiegato alle stesse condizioni (ovvero al tasso $i = 4.3\,\%$). Si procede quindi al calcolo del montante alla fine del secondo anno

$$M_2 = M_1\,(1 + 0.043)^1 = 3\,650.50 \cdot 1.043 = 3\,807.47\,;$$



3. si calcola, infine, il montante all'epoca $t = 3$ considerando come capitale all'inizio del periodo considerato M_2. Si ottiene

$$M_3 = M_2\,(1 + 0.043)^1 = 3\,807.47 \cdot 1.043 = 3\,971.19\,.$$



Si osservi che il risultato coincide con quello ottenuto facendo i conti "senza interruzioni"[5]. □

Esercizio 7 *Dopo* 3 *anni e* 9 *mesi un risparmiatore ritira un montante di* 12 000 *euro maturato su un proprio deposito a risparmio vincolato. Si calcoli il capitale iniziale (o valore attuale) del deposito, sapendo che gli interessi sono stati computati in regime di interesse composto a un tasso annuo del* 4.5 %.

Soluzione. Dalla relazione

$$M = C(1+i)^t\,,$$

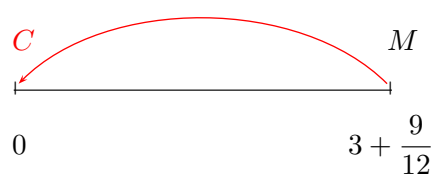
che esprime il montante nel regime di interesse composto come funzione esponenziale del tempo, si ricava che

$$C = M(1+i)^{-t}\,,$$

dove C è il capitale iniziale (o il valore attualizzato V) del montante M. Pertanto,

$$C = 12\,000\,(1+0.045)^{-\left(3+\frac{9}{12}\right)} = 12\,000\,(1+0.045)^{-45/12} = 10174.08€$$

è il valore attuale del montante dell'operazione d'investimento in esame che ha durata $t = 3 + \frac{9}{12}$.



□

[5]Suggerimento: provare a svolgere il medesimo esercizio in regime di interesse semplice. Si confrontino i risultati della capitalizzazione con e senza interruzioni.

Esercizio 8 *Calcolare l'interesse prodotto da un investimento di* 3 000 *euro per* 6 *anni al tasso annuale* $i = 1.75\%$ *nel regime dell'interesse composto.*

Soluzione. La formula del montante nel regime di interesse composto è:

$$M = C(1+i)^t.$$

Dunque se vogliamo ricavare l'interesse prodotto si ha

$$I = M - C = C(1+i)^t - C = C((1+i)^t - 1)$$

che nel nostro caso dà il valore

$$I = 3\,000 \cdot [(1+0.0175)^6 - 1] = 329.11\,€\,.$$

□

Esercizio 9 *Si determini in quanto tempo, in regime di interesse composto, un capitale di* 8 000 *euro produce un interesse di* 800 *euro al tasso del* 2.5 % *annuo.*

Soluzione. Dalla relazione[6]

$$M = C\,(1+i)^t,$$

mediante semplici passaggi algebrici si ottiene

$$t = \frac{\ln M/C}{\ln(1+i)} = \frac{\ln M - \ln C}{\ln(1+i)}\,.$$

Sostituendo i dati del problema, si ha il risultato

$$t = \frac{\ln 8\,800 - \ln 8\,000}{\ln(1+0.025)} = \frac{\ln 1.1}{\ln 1.025} = 3.859866163\ldots\,,$$

ovvero circa 3 anni, 10 mesi e 10 giorni. □

Esercizio 10 *Determinare il tasso di interesse annuo affinché, in regime di interesse composto, un capitale di* 1 600 *euro produca un interesse di* 80 *euro in sei mesi.*

Soluzione. Dalla formula del montante[7], ricordando che $M = C + I$, si ricava immediatamente

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\,.$$

Risultano assegnate le grandezze $M = 1\,680$ e $t = \frac{6}{12} = 0.5$. Sostituendo tali dati nella formula precedente si ottiene

$$i = \left(\frac{1\,680}{1\,600}\right)^{\frac{1}{0.5}} - 1 = 0.1025 = 10.25\,\%\,.$$

□

[6]Suggerimento: provare a svolgere l'esercizio partendo dalla formula dell'interesse.
[7]Suggerimento: provare a svolgere l'esercizio partendo dalla formula dell'interesse.

Tassi equivalenti

Esercizio 11 *Determinare, in regime di interesse semplice,*

- *il tasso bimestrale equivalente al tasso di interesse annuo del* $9\,\%$*;*
- *il tasso annuo equivalente al tasso semestrale del* $5\,\%$*.*

Soluzione. Il tasso periodale i_m è equivalente al tasso annuo i se lo stesso capitale C produce nello stesso periodo di tempo t il medesimo interesse. Ricordiamo che in un anno vengono effettuate m capitalizzazioni bimestrali. In regime di interesse semplice si ha

$$C\,i\,t\ = C\,m\,i_m\,t\,,$$

ponendo $C = 1$ e $t = 1$, si ricava immediatamente

$$i = m\,i_m \qquad \Leftrightarrow \qquad i_m = \frac{i}{m}\,.$$

Sostituendo i dati del problema si ottiene il tasso bimestrale equivalente al tasso annuo $i = 9\,\%$

$$i_6 = \frac{i}{6} = \frac{0.09}{6} = 0.015 = 1.5\,\%\,,$$

e il tasso annuo equivalente al tasso semestrale $i_2 = 5\,\%$

$$i = 2\,i_2 = 2 \cdot 0.05 = 0.1 = 10\,\%\,.$$

□

Esercizio 12 *Dato il tasso annuo dell'*$8\,\%$*, si trovino in regime di interesse composto gli equivalenti tassi semestrale e mensile.*

Soluzione. Nel regime di interesse composto la relazione fra tassi equivalenti è

$$1 + i = (1 + i_m)^m$$

dove i è il tasso di interesse annuo e i_m è il tasso di interesse relativo a $\frac{1}{m}$-simo di anno. Noto i, si può quindi calcolare i_m come

$$i_m = (1 + i)^{1/m} - 1.$$

Pertanto, il tasso semestrale ($m = 2$) e il tasso mensile ($m = 12$) equivalenti al tasso annuo $i = 8\,\%$ sono rispettivamente pari a

$$i_2 = (1 + 0.08)^{1/2} - 1 \simeq 0.03923\,,$$

$$i_{12} = (1 + 0.08)^{1/12} - 1 \simeq 0.00643\,.$$

□

Esercizio 13 *Dato il tasso di interesse annuale $i = 3.5\,\%$ si trovi il tasso equivalente bimestrale in regime di capitalizzazione composta.*

Soluzione. Il tasso bimestrale i_6 è equivalente al tasso annuo i se lo stesso capitale C (senza perdita di generalità possiamo porre $C = 1$) produce nello stesso periodo di tempo (per semplicità un anno) lo stesso montante (o, equivalentemente, lo stesso interesse). Ricordiamo che in un anno vengono effettuate 6 capitalizzazioni bimestrali. In regime di interesse composto si ha

$$C\,(1 + i_6)^6 = C\,(1 + i)$$

da cui si ricava immediatamente

$$i_6 = (1 + i)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.035^{\frac{1}{6}} - 1 = 0.005750039\ldots \simeq 0.575\,\%$$

□

Esercizio 14 *Si determini, in regime di interesse composto, il tasso di sconto semestrale equivalente al tasso di interesse annuo del* $6\,\%$.

Soluzione. Ricordiamo che la relazione che lega il tasso di sconto d al tasso di interesse i è

$$d = \frac{i}{1 + i}\,.$$

Tale relazione vale in qualsiasi regime finanziario.

Se è noto il tasso di interesse semestrale i_2, il tasso di sconto relativo allo stesso periodo, indicato con d_2, è dato da

$$d_2 = \frac{i_2}{1 + i_2}\,.$$

Dai dati del problema si ha

$$i_2 = (1 + i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0.06)^{\frac{1}{2}} - 1 \simeq 0.029563\,.$$

Si ottiene, infine,

$$d_2 = \frac{i_2}{1 + i_2} \simeq 0.028714\,.$$

Si osservi che

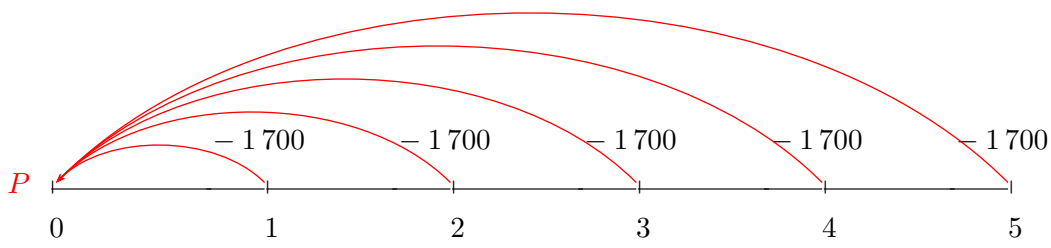
$$i > d\,.$$

□

Rendite

Esercizio 15 *Una motocicletta viene acquistata oggi con l'accordo acquirente-venditore di effettuare il pagamento mediante* 5 *versamenti annuali, al termine di ogni anno, del valore di* 1 700 *euro ciascuno. Sapendo che il tasso di interesse concordato è del* 7 % *annuo, si determini il valore della motocicletta.*

Soluzione. L'operazione finanziaria è schematizzata come segue.



L'equazione

$$P = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} + R(1+i)^{-5}$$

stabilisce che il prezzo della motocicletta P è pari al valore attuale dei pagamenti (*cash-flow* negativi) futuri. equivalenza finanziaria ci dice che è equo scambiare un bene del valore P all'epoca $t = 0$ contro un insieme di pagamenti di importo costante e pari a $R = 1\,700$ euro, esigibili in corrispondenza di determinate epoche ($t = 1, 2, \ldots, 5$). L'insieme di tali pagamenti costituisce una rendita a rata costante R, posticipata, immediata, di durata $n = 5$ anni.

Possiamo calcolare P a partire dalla somma dei valori attuali delle singole rate

$$P = 1\,700\left[(1.07)^{-1} + (1.07)^{-2} + (1.07)^{-3} + (1.07)^{-4} + (1.07)^{-5}\right] = 6\,970.34\,€\,.$$

In alternativa, possiamo utilizzare la formula (più compatta e che ci permette di compiere più speditamente i calcoli) del valore attuale di una rendita a rata costante R posticipata di n rate[8]:

$$P = R\,a_{\overline{n}|i} = R\,\frac{1-v^n}{i} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio, si ottiene

$$P = 1\,700\frac{1-(1.07)^{-5}}{0.07} = 6\,970.34\,€\,.$$

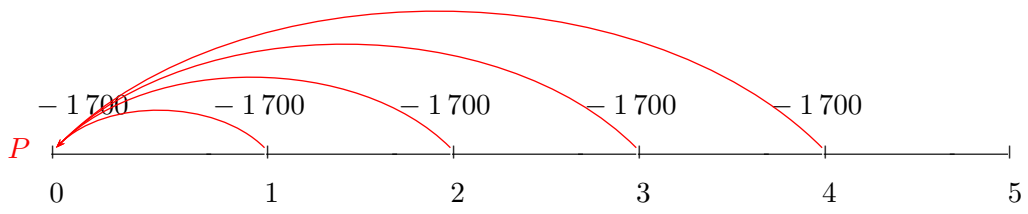
□

[8] Si osservi che il simbolo $a_{\overline{n}|i}$ (si legge "a figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il valore attuale di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, posticipata, di n rate

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,.$$

Esercizio 16 *Una motocicletta viene acquistata oggi con l'accordo acquirente-venditore di effettuare il pagamento mediante* 5 *versamenti annuali del valore di* 1 700 *euro ciascuno. Il primo versamento viene effettuato in data odierna. Sapendo che il tasso di interesse concordato è dell'*8.5 % *annuo, si determini il valore della motocicletta.*

Soluzione. L'operazione finanziaria è schematizzata come segue.



Si osservi che nessuna rata viene pagata all'epoca $t = 5$. La quinta rata viene pagata in $t = 4$ (ovvero all'inizio del quinto anno, che evidentemente coincide con la fine del quarto).

L'equivalenza finanziaria

$$P = R(1+i)^0 + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4}$$

stabilisce che il prezzo della motocicletta P è pari al valore attuale di un insieme di pagamenti di importo costante pari a $R = 1\,700$ euro, esigibili in corrispondenza delle epoche $t = 0, 1, 2, 3, 4$. L'insieme di tali pagamenti costituisce una rendita a rata costante R, anticipata (ciascuna rata è esigibile all'inizio del periodo di riferimento), immediata, di durata $n = 5$ anni.

Possiamo calcolare P a partire dalla somma dei valori attuali delle singole rate

$$P = 1\,700\left[1 + (1.085)^{-1} + (1.085)^{-2} + (1.085)^{-3} + (1.085)^{-4}\right] = 7\,268.51\,€\,.$$

In alternativa, possiamo utilizzare la formula del valore attuale di una rendita a rata costante R, anticipata e immediata di n rate[9]:

$$P = R\,\frac{1 - v^n}{i}(1+i) = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)\,.$$

Si ottiene il seguente risultato

$$P = 1\,700\frac{1-(1.085)^{-5}}{0.085}(1.085) = 7\,268.51\,€\,.$$

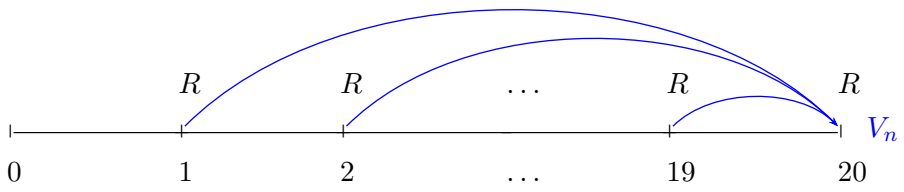
□

[9]Si osservi che il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (si legge "a puntato, o anticipato, figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il valore attuale di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, anticipata, di n rate

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)\,.$$

Esercizio 17 *Si vuole costituire un capitale di* 12 000 *euro in* 5 *anni mediante dei versamenti trimestrali, di importo costante, posticipati, in un conto corrente bancario remunerato al tasso annuo del* $2,5\,\%$. *Qual è l'ammontare di ciascun versamento?*

Soluzione. Si tratta di un caso di rendita temporanea a rata costante posticipata della quale conosciamo il montante finale $V_n = 12\,000$ ed il numero di rate $n = 5 \cdot 4 = 20$. Al fine di costituire tale capitale a scadenza, si effettuano quindi 20 versamenti trimestrali:



Dato che il periodo della rendita è di tre mesi, dobbiamo inoltre ricavare il tasso trimestrale equivalente al tasso annuale in regime di capitalizzazione composta:

$$i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.025)^{\frac{1}{4}} - 1 \simeq 0.00619 = 0.619\,\%.$$

A questo punto ricordiamo che la formula del montante di una rendita temporanea a rata (trimestrale) costante posticipata è[10]

$$V_n = R s_{\overline{n}|i_4} = R \frac{(1+i_4)^n - 1}{i_4}\,.$$

La rata R è data da

$$R = \frac{V_n}{s_{\overline{n}|i_4}} = \frac{V_n}{\dfrac{(1+i_4)^n - 1}{i_4}}$$

e quindi si ottiene

$$R = \frac{12\,000}{\dfrac{1.00619^{20} - 1}{0.00619}} = 565.48\,€\,.$$

□

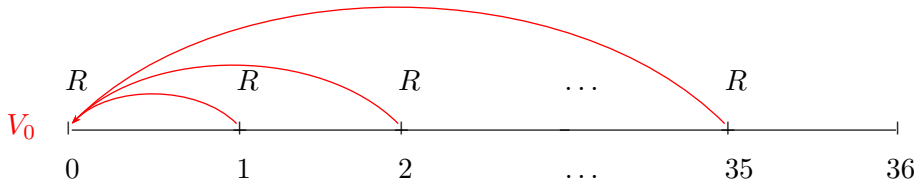
Esercizio 18 *Si supponga di dover pagare all'inizio di ogni mese il canone di affitto di un immobile per* 3 *anni. Il locatore propone in alternativa di pagare tutto l'affitto subito versando* 20 000 *euro. Tenendo conto che il tasso di interesse offerto dalla banca al locatario sul conto corrente da cui preleva i soldi per pagare l'affitto è dell'*1.25 % *annuo, si determini l'ammontare del canone mensile che rende le due modalità di pagamento equivalenti?*

[10] Si osservi che il simbolo $s_{\overline{n}|i}$ (si legge "s figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il montante di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, posticipata, di n rate

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\,.$$

Soluzione. Tale operazione finanziaria si configura come una rendita mensile anticipata a rata costante di cui sono noti il valore attuale $V_0 = 20\,000$ euro, il numero di rate $n = 12 \cdot 3 = 36$ e il tasso di interesse. Poiché le rate sono mensili e la durata della rendita viene espressa in mesi ($n = 36$), dobbiamo calcolare il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo $i = 1.25\,\%$:

$$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.0125)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0.00103575 \simeq 0.1036\,\%$$



Ricordando che la formula del valore attuale di una rendita temporanea a rata (mensile) costante anticipata è[11]

$$V_0 = R\ddot{a}_{\overline{n}|i_{12}} = R(1+i_{12})a_{\overline{n}|i_{12}} = R(1+i_{12})\frac{1-(1+i_{12})^{-n}}{i_{12}}\,,$$

otteniamo

$$R = \frac{V_0}{\dfrac{1-(1+i_{12})^{-n}-1}{i_{12}}(1+i_{12})} = \frac{20\,000}{\dfrac{1-1.001036^{-35}}{0.001036}\cdot 1.001036} = 565.68\,€\,.$$

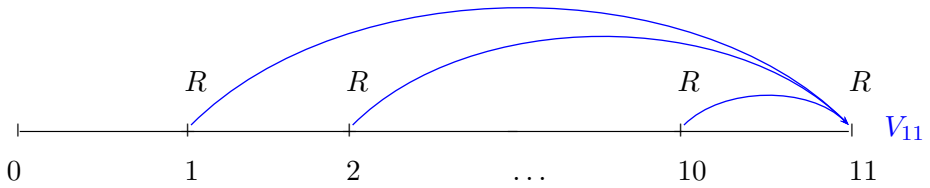
□

Esercizio 19 *In previsione dell'acquisto di un proprio appartamento, un giovane lavoratore dipendente decide di depositare su un conto bancario che frutta interessi in base a un tasso annuo del* 4.2 % *un terzo del proprio stipendio annuale (per semplicità, si assuma che il versamento avvenga in un'unica soluzione alla data 31/12 di ogni anno). Nell'ipotesi che lo stipendio rimanga costante e venga corrisposto solo per* 12 *mensilità, ciascuna di* 1 350 *euro, si determini il risparmio accumulato dopo* 11 *anni lavorativi.*

Soluzione. Si tratta di determinare il montante di una rendita annua posticipata a rata costante R e durata $n = 11$ anni, caratterizzata da versamenti effettuati alla fine di ciascun anno secondo il seguente diagrammi importi/epoche

[11] Si osservi che il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (si legge "a puntato, o anticipato, figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il valore attuale di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, anticipata, di n rate

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^n}{i}(1+i)\,.$$



L'ammontare R dei versamenti nell'ipotesi che lo stipendio del lavoratore rimanga costante è

$$R = \frac{1}{3}\,(12 \cdot 1\,350) = 5\,400\,€\,.$$

Il montante V_n di una rendita annua posticipata a rata costante è

$$V_n = R\, s_{\overline{n}|i}\,,$$

dove $s_{\overline{n}|i}$, il montante di una rendita annua, unitaria, posticipata, immediata e temporanea, è definito dalla seguente espressione

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

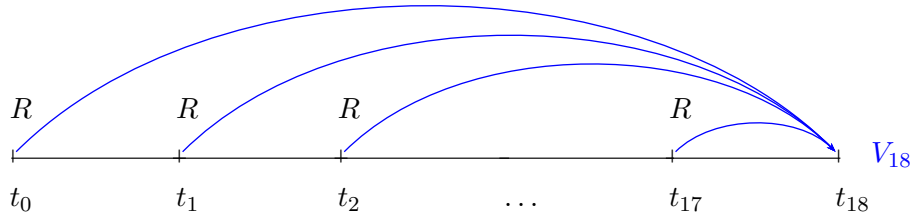
Pertanto,

$$V_{11} = 5\,400 \frac{1.042^{11} - 1}{0.042} = 5\,400 \cdot 13.62700881 = 73\,585.85\,€$$

è il risparmio accumulato dal lavoratore durante l'arco di 11 anni lavorativi. □

Esercizio 20 *Si trovi il montante di una rendita a rata anticipata costituita da* 18 *rate annue costanti di importo pari a* 470 *euro. Il tasso tecnico della rendita è del* 5 %.

Soluzione. Se indichiamo con $R = 470$ euro la rata costante e con $t_k = k$, per $k = 0, 2, \ldots, 18$, le epoche di riferimento, possiamo rappresentare l'operazione finanziaria (rendita) mediante il seguente diagramma importi/epoche



Il montante V_n di una rendita annua anticipata a rata costante è

$$V_n = R\, \ddot{s}_{\overline{n}|i},$$

dove $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, il montante di una rendita annua, unitaria, anticipata, immediata e temporanea, è definito dalla seguente espressione

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

All'epoca finale $n = 18$, il montante della rendita in esame è pari a

$$V_{18} = 470 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^{18} - 1}{0.05} = 470 \cdot 29.53900383 = 13\,883.33\,€\,.$$

□

Esercizio 21 *Un'azienda stipula con una società finanziaria un contratto di* leasing *(locazione) di durata quadriennale relativo ad un automezzo commerciale il cui prezzo di listino è di* 30 000 *euro. Il contratto prevede il versamento immediato di una quota pari al* 10 % *del valore del bene; l'azienda locataria si impegna inoltre a versare per tutta la durata del contratto canoni trimestrali posticipati di importo costante e, al termine del periodo di locazione, può acquistare l'automezzo pagando il prezzo di riscatto pari al* 15 % *del valore del bene. Si determini l'importo del canone sapendo che la società finanziaria intende ottenere dall'operazione un rendimento annuo del* 7.5 %.

Soluzione. Indichiamo con $F = 30\,000$ il prezzo di listino dell'automezzo. Sia A l'ammontare del *maxicanone anticipato* (pagato all'epoca $t = 0$), calcolato in percentuale sul prezzo di fattura del bene; si ha

$$A = 10\,\%\,F = 0.10 \cdot 30\,000 = 3\,000\,€\,.$$

Sia R il *prezzo di riscatto* del bene, ovvero il prezzo versato in caso di acquisto del bene al termine del contratto di locazione, calcolato in percentuale sul valore F; si ha

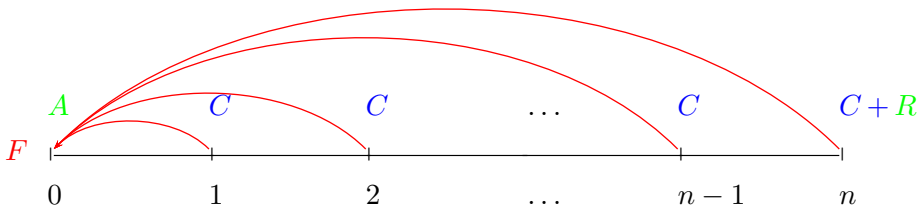
$$R = 15\,\%\,F = 0.15 \cdot 30\,000 = 4\,500\,€\,.$$

L'azienda locatrice dovrà pagare, inoltre, un insieme di canoni periodici (trimestrali, corrisposti in via posticipata) di importo costante C. Tale insieme di pagamenti si configura come una rendita temporanea (di n rate), immediata (il primo pagamento viene effettuato a partire dal primo periodo), a rata costante C posticipata (i pagamenti vengono effettuati alla fine del periodo di riferimento).

Noti i valori F, A, R, il numero dei canoni $n = 4 \cdot 4 = 16$ e il tasso di remunerazione annuo i, si deve determinare l'importo dei canoni trimestrali C.

L'operazione finanziaria di *leasing* è schematizzata come segue[12]:

[12] Si noti che il maxicanone iniziale e il prezzo di riscatto sono stati evidenziati in un colore diverso per distinguerli dall'insieme dei canoni ordinari C corrisposti trimestralmente.



L'equazione[13]

$$F = A + C\frac{1-(1+i_4)^{-16}}{i_4} + R(1+i)^{-4} = A + Ca_{\overline{16}|i_4} + R(1+i)^{-4}$$

stabilisce che, da un punto di vista finanziario, è equo scambiare un bene di valore F contro un insieme di pagamenti $\{A, C, C, \ldots, C, R\}$.

Dall'equazione precedente, con alcuni semplici passaggi algebrici, si ricava C in funzione delle altre variabili in gioco:

$$C = \frac{F - A - R(1+i_4)^{-16}}{a_{\overline{n}|i}}\,.$$

Poiché i canoni sono trimestrali e il tempo è espresso in trimestri, è necessario determinare il tasso trimestrale i_4 equivalente al tasso annuo i. Si ha

$$i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.075)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0182446\ldots$$

Sostituendo i dati nella formula trovata per C si ha

$$C = \frac{30\,000 - 3\,000 - 4\,500\,(1+0.0182446)^{-16}}{a_{\overline{16}|0.0182446}} = 1716.27\,€\,.$$

□

Ammortamenti

Esercizio 22 *(**Ammortamento italiano**) Un prestito di ammontare* 30 000 *euro viene ammortizzato in* 6 *anni, mediante il pagamento di rate annuali, con quote di capitale costanti. Sapendo che il tasso di interesse annuo è dell'*8.5 %*, si rediga il piano di ammortamento.*

[13] Avremmo potuto scrivere, in maniera del tutto equivalente, la seguente equazione

$$F = A + C\frac{1-(1+i_4)^{-16}}{i_4} + R(1+i_4)^{-16}.$$

Soluzione. Indichiamo con $S = 30\,000$ la somma mutuata. Per la restituzione di tale capitale è previsto il pagamento di $n = 6$ rate caratterizzate da quote di ammortamento (capitale) costanti.

Calcoliamo innanzitutto la quota di capitale, ricordando a tal fine che in generale sussiste il vincolo di chiusura

$$S = \sum_{k=1}^{n} C_k \,.$$

Nel caso dell'ammortamento italiano, la quota di capitale è costante $C_k = C$, per cui si ha

$$S = \sum_{k=1}^{n} C = n\,C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{S}{n}\,.$$

La quota di capitale è quindi

$$C = \frac{30\,000}{6} = 5\,000\,.$$

Ricordando che $D_0 = S$, dalle relazioni che seguono

$$\begin{aligned} D_k &= D_{k-1} - C = \frac{n-k}{n} S \\ I_k &= i\,D_{k-1} = i\,\frac{n-k+1}{n} S \\ R_k &= C + I_k \end{aligned}$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$, possiamo ricavare tutte le altre grandezze.
Il piano di ammortamento è il seguente

k	R_k	$C_k = C$	I_k	D_k
0	0	0	0	30000.00
1	7550.00	5000.00	2550.00	25000.00
2	7125.00	5000.00	2125.00	20000.00
3	6700.00	5000.00	1700.00	15000.00
4	6275.00	5000.00	1275.00	10000.00
5	5850.00	5000.00	850.00	5000.00
6	5425.00	5000.00	425.00	0

Riportiamo i calcoli per esteso solamente per la prima rata:

$$I_1 = i\,D_0 = 0.085 \cdot 30\,000 = 2\,550\,,$$

$$D_1 = D_0 - C = 30\,000 - 5\,000 = 5\,000\,,$$

$$R_1 = C + I_1 = 5\,000 + 2\,550 = 7\,550\,.$$

□

Esercizio 23 *(**Ammortamento a rate costanti posticipate**) Per procedere al rinnovo di un macchinario obsoleto, un imprenditore tessile contratta con un istituto di credito un prestito di* 75 000 *euro, da rimborsarsi in* 6 *rate semestrali posticipate di importo costante in base al tasso di interesse annuo del* 8 %*. Si rediga il piano di ammortamento del prestito.*

Soluzione. Il modello di ammortamento adottato dalle parti contrattuali, che prevede il pagamento di rate costanti posticipate, va sotto il nome di *ammortamento francese*. Secondo tale modello di ammortamento, la somma $S = 75\,000$ che all'epoca $t = 0$ passa dall'istituto di creditore (parte creditrice) all'imprenditore tessile (parte debitrice) è intesa come il valore attuale di una rendita a rate costanti posticipate R. Sfruttando allora la nota equivalenza finanziaria:

$$S = \sum_{k=1}^{n} R(1+i)^{-k} = R\, a_{\overline{n}|i},$$

si ottiene facilmente l'importo incognito R:

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Prima di procedere all'effettivo calcolo di R, occorre convertire il tasso annuo $i = 8\%$ nell'equivalente tasso semestrale i_2:

$$i_2 = (1+0.08)^{1/2} - 1 \simeq 0.0392304845413265,$$

essendo $n = 6$ le rate di ammortamento pagate con cadenza semestrale. Riscrivendo la relazione di cui sopra otteniamo l'importo della rata costante

$$\begin{aligned} R &= \frac{S}{\dfrac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}} \\ &= \frac{75000}{\dfrac{1-(1+0.0392304845413265)^{-6}}{0.0392304845413265}} = 14271.32. \end{aligned}$$

Il piano di ammortamento da redigere è rappresentabile mediante la seguente tabella:

Epoca k	$R = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0			
1	14271.32			
2	14271.32			
3	14271.32			
4	14271.32			
5	14271.32			
6	14271.32			0

dove è stato riportato l'importo costante delle rate di ammortamento, ossia $R_k = R = 14271.32$, per $k = 1, \ldots, 6$, e il vincolo di chiusura sul debito residuo all'epoca finale, $D_6 = 0$. Per determinare le quantità incognite C_k, I_k e D_k, possiamo sfruttare la caratteristica dell'ammortamento francese di avere quote di capitale crescenti in progressione geometrica di ragione $(1+i)$, ossia per $k = 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} C_k &= C_{k-1}(1+i), \\ &= C_{k-2}(1+i)(1+i) = C_{k-2}(1+i)^2, \\ &= \ldots \\ &= C_1(1+i)^{k-1}. \end{aligned}$$

Una volta trovata un'espressione per C_1 si riesce agevolmente a calcolare tutte le altre quote di capitale. Partendo dalla condizione di chiusura, $S = \sum_{k=1}^{n} C_k$, e svolgendo semplici passaggi si ottiene per C_1 la seguente relazione:

$$C_1 = R(1+i)^{-n},$$

da cui, sostituendo, si ha

$$C_k = R(1+i)^{-(n-k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Per differenza tra le rate e le quote di capitale si possono ottenere direttamente anche le quote interessi I_k

$$I_k = R\big[1 - (1+i)^{-(n-k+1)}\big], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Infine, il debito residuo D_k può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{j=k+1}^{n} C_j \\ &= R \sum_{j=k+1}^{n} (1+i)^{-(n-j+1)} \\ &= R a_{\overline{n-k}|i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Le relazioni ricavate sopra consentono di calcolare per ogni epoca k le singole voci del seguente piano di ammortamento:

k	$R = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	75000.00
1	14271.32	11329.03	2942.28	63670.96
2	14271.32	11773.48	2497.84	51897.48
3	14271.32	12235.35	2035.96	39662.12
4	14271.32	12715.35	1555.96	26946.77
5	14271.32	13214.18	1057.13	13732.58
6	14271.32	13732.58	538.73	0

□

Esercizio 24 *Si completi il seguente piano di ammortamento:*

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1		1000		
2	3				2341
3	6			369	

Soluzione. Ovviamente $D_3 = 0$; per il vincolo di chiusura si ha

$$C_3 = D_2\,,$$

e quindi $C_3 = 2\,341$; di conseguenza possiamo ricavarci immediatamente R_3 facendo la somma di quota capitale ed interesse:

$$R_3 = C_3 + I_3 = 2\,341 + 369 = 2\,710\,,$$

e in questo modo abbiamo completato l'ultima riga:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1		1000		
2	3				2341
3	6	2710	2341	369	0

Per proseguire con l'esercizio è necessario ricavare il tasso di interesse; siccome l'ultima rata viene pagata dopo 3 anni dalla penultima si ha che

$$I_3 = D_2(1+i)^3 - D_2$$

da cui si ricava che il tasso di interesse annuo i è dato da

$$i = \left(\frac{I_3}{D_2} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{369}{2\,341} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \simeq 0.05 = 5\,\%\,.$$

A questo punto, siccome la prima rata viene pagata dopo un anno si ha

$$I_1 = S\,i = 5\,000 \cdot 0.05 = 250$$

e quindi possiamo anche ricavare R_1

$$R_1 = C_1 + I_1 = 1\,000 + 250 = 1\,250$$

e D_1

$$D_1 = S - C_1 = 5\,000 - 1\,000 = 4\,000$$

ed abbiamo completato la prima riga:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1	1250	1000	250	4000
2	3				2341
3	6	2710	2341	369	0

Per concludere, ricaviamo I_2 osservando che la seconda rata viene pagata a distanza di due anni dalla prima

$$I_2 = D_1(1+i)^2 - D_1 = 4\,000 \cdot (1.05^2) - 4\,000 = 410\,.$$

La quota capitale C_2 si ottiene considerando il debito residuo:

$$D_2 = D_1 - C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = D_1 - D_2 = 4\,000 - 2\,341 = 1\,659\,;$$

e la rata R_2 per somma di quota capitale ed interesse:

$$R_2 = C_2 + I_2 = 1\,659 + 410 = 2\,069$$

ed abbiamo così completato il piano di ammortamento:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1	1250	1000	250	4000
2	3	2069	1659	410	2341
3	6	2710	2341	369	0

□

Esercizio 25 *Completare il seguente piano di ammortamento con quote costanti di capitale*

k	$R_k = C_k + I_k$	$C_k = C$	I_k	D_k
0	*0*	*0*	*0*	*25000*
1	*6500*			
2			*1250*	
3				
4				
5				
6				

Soluzione. Trattandosi di ammortamento a quote di capitale costanti, la colonna di C_k è formata da valori tutti uguali tra di loro.

La seconda quota interessi è calcolata sul debito residuo del primo anno, vale a dire su 25 000 euro:

$$I_2 = i\, D_1\,.$$

Sostituendo i dati del problema si deve risolvere l'equazione

$$1\,250 = 25\,000\, i \qquad \Leftrightarrow \qquad i = 0.05\,.$$

Stabilito il tasso dell'operazione, e indicato con S l'importo mutuato, la rata di 6 500 euro è data dalla somma tra la prima quota capitale (cioè 1/6 del debito) e la prima quota interessi, (cioè il 5 % di S):

$$R_1 = C_1 + I_1 = \frac{1}{6}\, S + 0.05\, S = 6\,500\,,$$

da cui ricaviamo

$$S = 30\,000\,.$$

La quota di capitale è quindi

$$C = \frac{30\,000}{6} = 5\,000.$$

La compilazione del piano di ammortamento è lasciata al lettore[14].

□

Esercizio 26 [15] *Un individuo riceve a prestito la somma di* 40 000 *euro che deve restituire in n rate annue costanti, pagate in via posticipata, di importo* 9 495.86 *euro ciascuna, calcolate in base al tasso annuo del* 6 %*. Si determini il numero di rate necessarie per estinguere il debito e si rediga il piano di ammortamento.*

Cenno di soluzione. Dalla relazione

$$R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = S$$

si ricava

$$n = -\,\frac{\ln\,(1 - iS/R)}{\ln(1+i)}\,.$$

Si osservi che il numero di rate deve essere **intero** e tale che il loro valore attuale sia uguale (o, meglio, maggiore uguale) alla somma presa a prestito. Sostituendo i dati del problema, si ottiene $n = 5$ (si noti anche che, per effetto dell'arrotondamento dell'importo della rata, otteniamo 4.99999 . . .).

□

[14] Si veda, a tal proposito, il procedimento proposto nell'esercizio 22.

[15] Si veda l'esercizio 3, compito 22 gennaio 2004, versione A. Il testo dell'esercizio qui proposto è stato modificato rispetto alla versione proposta nel compito.

Esercizio 27 [16] *Si riceve oggi un finanziamento di* 500 000 *euro, che vanno restituiti in* 2 *rate uguali pagate rispettivamente tra* 2 *anni e tra* 4 *anni. Se il tasso di interesse annuo è del* 5 %*, calcolare la rata e redigere il piano di ammortamento.*

Suggerimento: si possono seguire due procedimenti alternativi per la determinazione della quota interessi:

1. calcolo di I_k $(k = 1, 2)$ utilizzando la formula dell'interesse in regime di interesse composto:
$$I_1 = D_0[(1+i)^2 - 1]\,,$$
$$I_2 = D_1[(1+i)^2 - 1]\,;$$

2. calcolo di I_k $(k = 1, 2)$ utilizzando la relazione $I_k = i_{BI} D_{k-1}$, dove con i_{BI} si è indicato il tasso *biennale* equivalente al tasso annuo i:
$$i_{BI} = (1+i)^2 - 1.$$

□

[16] Si veda l'esercizio 5, compito 10 gennaio 2005, versione A.

Bibliografia

[BP] Basso, A., P. Pianca (2004) *Appunti di Matematica Finanziaria*. Cedam, Padova.

[C] Cacciafesta, F. (1997) *Lezioni di Matematica Finanziaria Classica e Moderna*. Giappichelli, Torino.